

Die Kurve gekriegt - vier Wege zur Parabel

Lösungsteil:

1) Springbrunnen Ansatz: Scheitelpunktform der quadratischen Gleichung

Form: $f(x) = a(x + b)^2 + c$

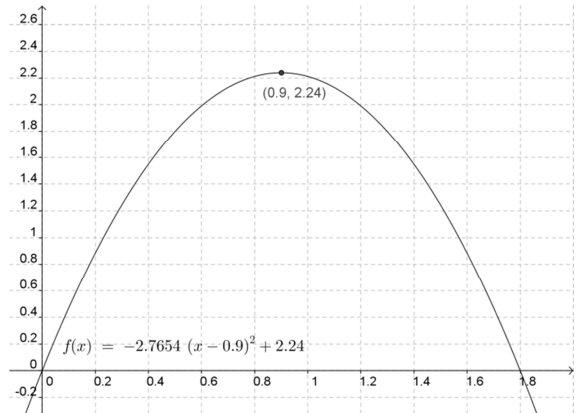
bekannte Punkte: S(0,9 | 2,24), N(1,80 | 0)

$f(x) = a(x - 0,9)^2 + 2,24 \Rightarrow$ Scheitelpunkt einsetzen

$0 = a(1,80 - 0,9)^2 + 2,24 \Rightarrow$ Punkt N einsetzen

$a \approx -2,7654 \Rightarrow$ nach a auflösen

$f(x) = -2,7654(x - 0,9)^2 + 2,24$



2) Rialto-Brücke Ansatz: Vereinfachte Scheitelpunktform der quadratischen Gleichung

Form: $f(x) = a x^2 + c$ (Scheitelpunkt auf der y-Achse)

bekannte Punkte: S(0 | 7,5), P(2 | 7,35)

$f(x) = a x^2 + 7,5 \Rightarrow$ Durchfahrtshöhe einsetzen

$7,35 = a 2^2 + 7,5 \Rightarrow$ Punkt P einsetzen

$a \approx -0,0375 \Rightarrow$ nach a auflösen

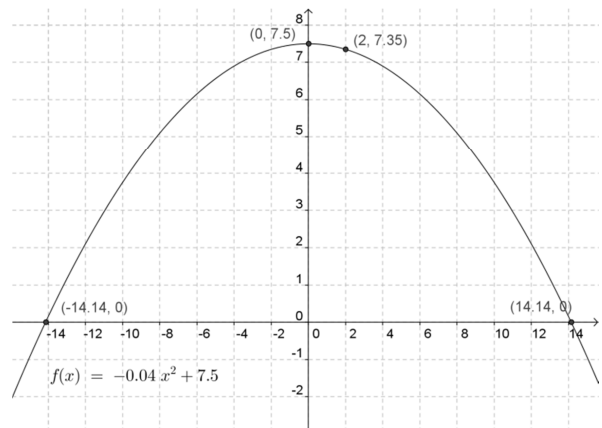
$f(x) = -0,0375 x^2 + 7,5$

Nullstellen berechnen:

$0 = -0,0375 x^2 + 7,5$

$x^2 = 200$

$x_1 \approx -14,14 \quad x_2 \approx 14,14 \Rightarrow$ Die ungefähre Spannweite der Brücke beträgt 28,28 Meter.



3) Snowboard-Halfpipe Ansatz: Differentialrechnung, erste Ableitung

Form: $f(x) = a x^2$ (Scheitelpunkt im Koordinatenursprung)

$f'(x) = 2ax$

$\tan(38^\circ) \approx 0,781 \Rightarrow$ Steigung 3m neben der Bahnmitte

$0,781 = 2a \cdot 3 \Rightarrow$ in die 1. Ableitung einsetzen

$a \approx 0,13 \Rightarrow$ nach a auflösen

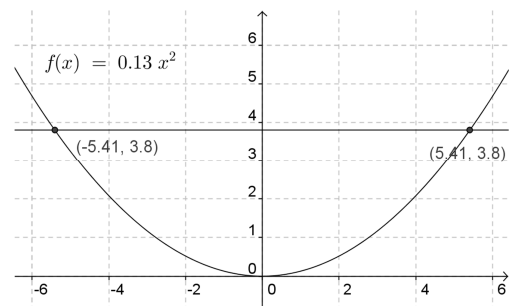
$f(x) = 0,13 x^2$

Breite berechnen:

$3,80 = 0,13 x^2$

$x_1 \approx -5,4 \quad x_2 \approx 5,4$

\Rightarrow Die ungefähre Breite beträgt 10,8 Meter.



4) Sonnenofen Ansatz: Gleichungssystem in Verbindung mit dem Additionsverfahren, allgemeine Form der quadratischen Gleichung

Form: $f(x) = a x^2 + b x + c$

Punkte auf dem Graphen der Parabel: $P_1(0|48,6)$, $P_2(30|21,6)$, $P_3(60|5,4)$

Gleichungssystem aufstellen:

I) $0a + 0b + c = 48,6 \Rightarrow c = 48,6$

II) $900a + 30b + c = 21,6$

III) $3600a + 60b + c = 5,4$

III - 2 • II: $1800a - 48,6 = -37,8 \Rightarrow a = 0,006$

a und c in II einsetzen, nach b auflösen $\Rightarrow b = -1,08$

$f(x) = 0,006x^2 - 1,08x + 48,6$

Durchmesser berechnen:

$0 = 0,006x^2 - 1,08x + 48,6$
 $= x^2 - 180x + 8100$

Nullstelle mit der pq-Formel berechnen:

$N_1 = 90$

\Rightarrow Der Durchmesser beträgt 180cm.

Vertiefung (Sek II ab Ende EF):

Wärmeleistung im Brennpunkt berechnen:

II • $0,9^2$ • $0,95 \text{ kW/m}^2 \approx 2,42 \text{ kW}$

Der Brennpunkt liegt auf der Senkrechten durch den Scheitelpunkt und kann mit Hilfe der ersten Ableitung / Tangente an einem beliebigen Reflektionspunkt auf der Parabel ermittelt werden (im Beispiel: $(150|21,6)$). Dabei gilt für den dort in Richtung Brennpunkt abgeleiteten senkrechten Sonnenstrahl: „Ausfallwinkel gleich Einfallwinkel“.

$f'(x) = 0,012x - 1,08$

abgelenkter Strahl: $m = \tan(90 - 2 \cdot 54,246) \approx -0,334$

$f'(150) = 0,72$

$b = 21,6 - (-0,334 \cdot 150) \approx 71,7$

Einfall-/Ausfallwinkel:

$s(90) = -0,334 \cdot 90 + 71,7 \approx 41,6$

$\alpha = 90 - \tan^{-1}(0,72) \approx 54,246^\circ$

\Rightarrow Der Brennpunkt befindet sich bei $F(90|41,6)$.

