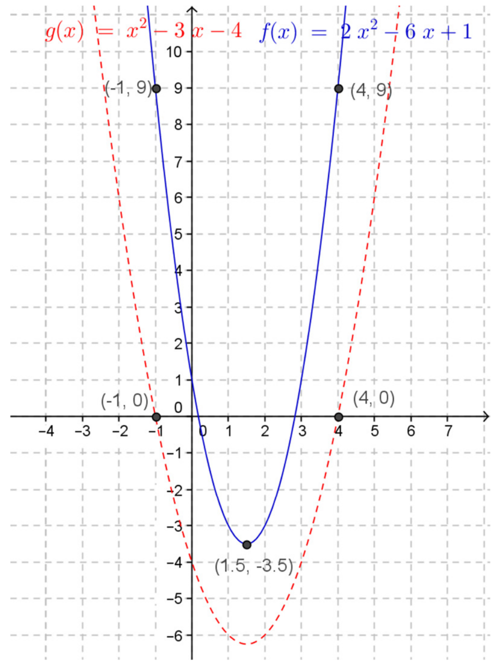
Die Quadratische Ergänzung / pq-Formel – eine Übersicht

Die Quadratische Ergänzung ist ein Verfahren zum Lösen von Quadratischen Gleichungen und zur Bestimmung des Scheitelpunktes von quadratischen Funktionen.

Dies wird im folgenden am Beispiel der quadratischen Funktion ***f(x) = 2x² – 6x + 1*** gezeigt.



1) Beispiel zur Lösung einer quadratischen Gleichung

Gegeben sei die Gleichung ***f(x) = 9.***

Im ersten Schritt ist die Gleichung in ihre Normalform zu überführen, d.h. in eine Form ohne einen Koeffizienten vor dem quadratischen Glied und mit einer Null rechts vom Gleichheitszeichen:

$2x^2 - 6x + 1 = 9$ $x^2 - 3x - 4 = 0$	Subtraktion von 9 und Division durch 2 auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens.

Der Graph rechts veranschaulicht die Wirkung des Normalisierungsschrittes. Die gesuchten Lösungen sind jetzt die Nullstellen der Normalform der Gleichung.

Die weitere Lösungsidee ist, ein quadratisches Binom durch eine geeignete Ergänzung aufzustellen, damit die Variable nur noch an einer einzigen Stelle im Term auftritt:

$x^2 - 3x - 4 = 0$	Gleichung in Normalform
$x^2 - 3x = 4$	Das absolute Glied auf die rechte Seite bringen.
$x^2 - 3x + (\frac{3}{2})^2 = 4 + (\frac{3}{2})^2$	Das Quadrat der Hälfte des linearen Gliedes auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens addieren.
$(x - 1{,}5)^2 = 6{,}25$	Die linke Seite in ein Binom umformen, die rechte Seite zusammenfassen.
$x - 1{,}5 = \pm 2{,}5$	Auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Wurzel ziehen.
$x_{1,2} = 1{,}5 \pm 2{,}5$	1,5 auf beiden Seiten addieren: die Variable x steht jetzt allein auf einer Seite.
$x_1 = -1 \wedge x_2 = 4$ $L = \{-1; 4\}$	Es ergeben sich die beiden Lösungswerte $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$, d.h. die Funktion f nimmt an diesen beiden Stellen den Funktionswert f(x)=9 an (siehe Graph).

Die pq-Formel

Führt man obiges Verfahren für eine allgemeine quadratische Gleichung in Normalform aus erhält man im letzten Schritt als Ergebnis die sogenannte *pq-Formel* (siehe Kasten rechts).

Sie ist also eine Kurzform des oben gezeigten Verfahrens und ermöglicht das einfache und zeitsparende Lösen quadratischer Gleichungen.

Mit *p=–3* und *q=–4* kann obige Gleichung in nur zwei Schritten gelöst werden:

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{-3}{2})^2 + 4} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 1{,}5 - 2{,}5 = -1 \\ x_2 &= 1{,}5 + 2{,}5 = 4 \end{aligned}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px = -q$$

$$x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 = -q + (\frac{p}{2})^2$$

$$(x + \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}}$$

2) Beispiel zur Bestimmung des Scheitelpunktes

Um den Scheitelpunkt der Parabel einer quadratischen Gleichung in allgemeiner Form

$f(x) = ax^2 + bx + c$

zu ermitteln, gibt es zwei prinzipielle Möglichkeiten.

a) Umformen des Funktionsterms in die Scheitelpunktform

$f(x) = 2x^2 - 6x + 1$	Ausklammern des Koeffizienten vor dem quadratischen Glied. Nicht (!) teilen, damit der Funktionswert unverändert bleibt.
$= 2(x^2 - 3x + 0{,}5)$	
$= 2(x^2 - 3x + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + 0{,}5)$	Die Quadratische Ergänzung im Klammerterm addieren und auch wieder subtrahieren, damit der Funktionswert unverändert bleibt.
$= 2((x - 1{,}5)^2 - 1{,}5^2 + 0{,}5)$	Die ersten drei Summanden zum Binom zusammenfassen.
$= 2((x - 1{,}5)^2 - 1{,}75)$	Die Konstanten zusammenfassen.
$= 2(x - 1{,}5)^2 - 3{,}5$	Die Klammer wieder auflösen.

Der Scheitelpunkt kann jetzt direkt aus dem Funktionsterm abgelesen werden: *S(+1,5 | –3,5)*

b) Berechnen mit Hilfe der pq-Formel

Zunächst mittels der pq-Formel die Nullstellen der Funktion ermitteln:

$$x^2 - 3x + 0{,}5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{-3}{2})^2 - 0{,}5}$$

$$x_1 \approx 0{,}177$$

$$x_2 \approx 2{,}823$$

Da die Parabel symmetrisch zur Senkrechten durch den Scheitelpunkt ist, liegt dieser genau in der Mitte zwischen den Nullstellen:

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1{,}5$$

$$y_s = f(1{,}5)$$

$$= 2 \cdot 1{,}5^2 - 6 \cdot 1{,}5 + 1$$

$$= -3{,}5 \qquad \Rightarrow S(1{,}5 \mid -3{,}5)$$