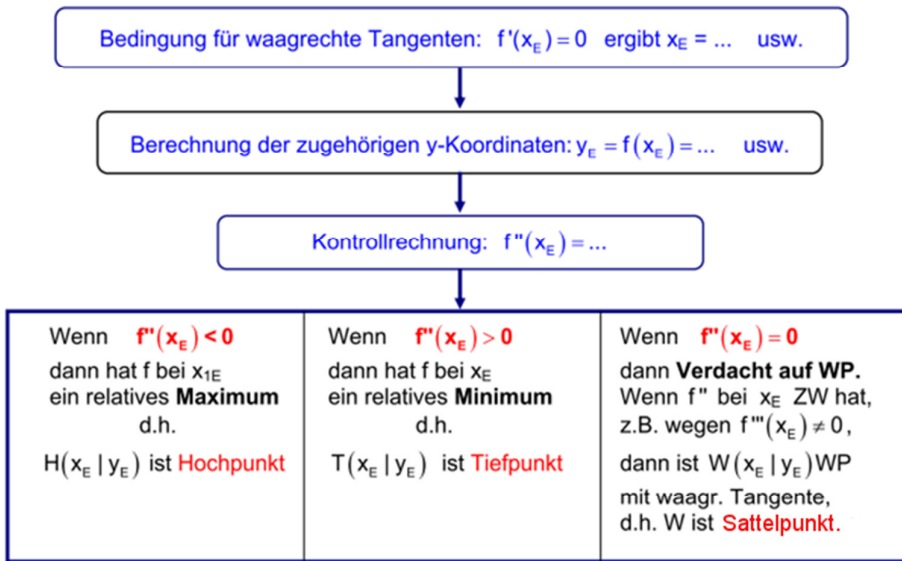
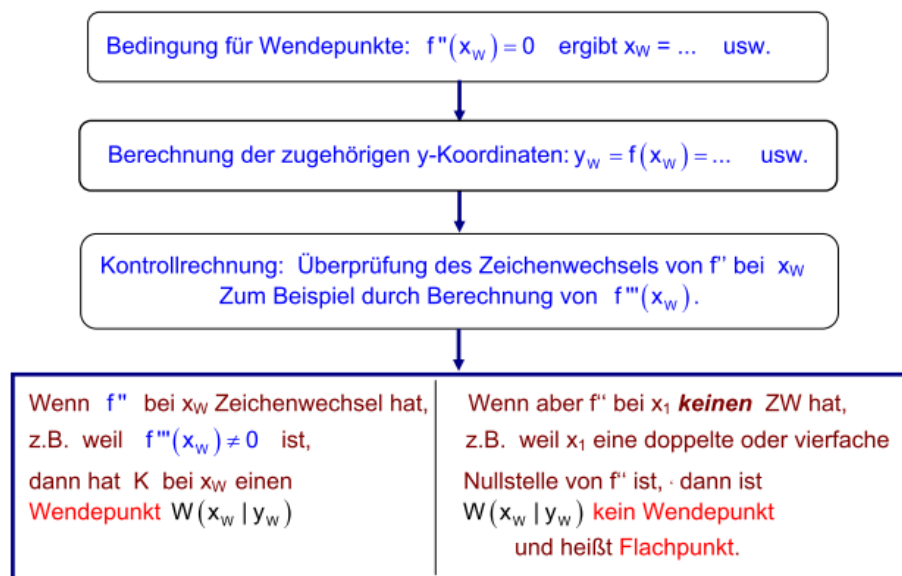


## Ablaufschema für die Berechnung von Extrempunkten und Sattelpunkten



## Ablaufschema für die Berechnung von Wendepunkten



Abschließend noch die genauen Formulierungen der sogenannten hinreichenden Bedingungen für diese Punkte:

**Voraussetzung:**  $f$  muß zweimal differenzierbar sein.

Wenn  $f'(x_E) = 0$  ist und  $f''(x_E) < 0$  ist, dann hat  $f$  an der Stelle  $x_E$  ein lokales oder relatives Maximum und  $H(x_E | f(x_E))$  ist ein **Hochpunkt** des Schaubildes von  $f$ .

Wenn  $f'(x_E) = 0$  ist und  $f''(x_E) > 0$  ist, dann hat  $f$  an der Stelle  $x_E$  ein lokales oder relatives Minimum und  $H(x_E | f(x_E))$  ist ein **Tiefpunkt** des Schaubildes von  $f$ .

---

**Voraussetzung:**  $f$  muß dreimal differenzierbar sein.

Wenn  $f'(x_W) = 0$  ist und  $f'''(x_W) \neq 0$ , dann ist  $W(x_W | f(x_W))$  ein **Wendepunkt** des Schaubildes  $K$  von  $f$ .

### Beispiel:

**Funktion:**  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5$

**Ableitungen:**

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 24x$

$f'''(x) = 24x - 24$

### Hoch-/Tief-/Sattelpunkte:

**Kandidaten für Extremstellen:**

$f'(x) = 0 \quad 4x^3 - 12x^2 = 0$   
 $4x^2(x - 3) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

**y-Koordinaten berechnen:**

(für das Zeichnen des Graphen)

$f(0) = 5 \Rightarrow E_1(0|5)$

$f(3) = -22 \Rightarrow E_2(3|-22)$

**Art der Extremstelle bestimmen:**

$f''(3) = 36$

Der Wert ist positiv, daher ist  $E_2$  ein lokales Minimum / Tiefpunkt.

$f''(0) = 0$

Der Wert ist Null, daher ist keine Entscheidung möglich und es ist ein Vorzeichenwechsel zu prüfen.

Teststelle  $x = -1$ :  $f'(-1) = -16$

Teststelle  $x = 1$ :  $f'(1) = -8$

$\Rightarrow$  kein VZW bei  $f'$ , daher ist  $E_1$  ein Sattelpunkt.

### Wendepunkte:

**Kandidaten für Wendestellen:**

$f''(x) = 0 \quad 12x^2 - 24x = 0$   
 $12x(x - 2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

**y-Koordinaten berechnen:**

(für das Zeichnen des Graphen)

$f(0) = 5 \Rightarrow W_1(0|5)$

$f(2) = -11 \Rightarrow W_2(2|-11)$

**Vorzeichenwechsel prüfen mit Hilfe des  $f'''$ -Kriteriums:**

$f'''(0) = -24$  (Intervallprüfung s.o.)

Der Wert ist negativ, daher ist  $W_1$  ein Links/Rechts-Wendepunkt.

$f'''(2) = 24$

Der Wert ist positiv, daher ist  $W_2$  ein Rechts/Links-Wendepunkt.

