Übungen Kurvendiskussion Lösungsblatt

1) Es handelt sich um eine ganzrationale Funktion, da sie aus einer Summe von Potenzfunktionen der Form $a_n x^n$ besteht und alle Exponenten Natürliche Zahlen sind (n ϵ |N).

2) $f'(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{4}{5}x^2$ $\quad f''(x) = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{5}x$ $\quad f'''(x) = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}$

3) Mit Hilfe der ersten Ableitung die Polarität der Steigung und deren Nullstellen betrachten (siehe auch Graph der ersten Ableitung auf der Folgeseite):

Intervallgrenzen: $f'(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{4}{5}x^2 = x^2\left(-\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad e_1 = 0,\ e_2 = 4$

Polarität im jeweiligen Intervall: $f'(-1) = 1 \quad f'(2) = 1{,}6 \quad f'(5) = -5$

Streng monoton steigend (*f'(x)* ist positiv) für: $x \in]-\infty; 0[\vee]0; 4[$

Streng monoton fallend (*f'(x)* ist negativ) für: $x \in]4; \infty[$

4) Mit Hilfe der zweiten Ableitung die Krümmung und deren Nullstellen betrachten (siehe auch Graph der zweiten Ableitung auf der Folgeseite):

Intervallgrenzen: $f''(x) = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{5}x = x\left(-\frac{3}{5}x + \frac{8}{5}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_1 = 0,\ w_2 = \frac{8}{3}$

Polarität im jeweiligen Intervall: $f''(-1) = -2{,}2 \quad f''(1) = 1 \quad f''(5) = -17$

Rechtsgekrümmt (f"(x) ist negativ) für: $x \in]-\infty; 0[\vee]\frac{8}{3}; \infty[$

Linksgekrümmt (f"(x) ist positiv) für: $x \in]0; \frac{8}{3}[$

5) Da es sich um eine ganzrationale Funktion handelt und die Exponenten gerade wie auch ungerade Werte annehmen, ist keine spezielle Symmetrie vorhanden.

Achsensymmetrie prüfen: $f(-x) = -\frac{1}{20}(-x)^4 + \frac{4}{15}(-x)^3 = -\frac{1}{20}x^4 - \frac{4}{15}x^3 \neq f(x)$

Punktsymmetrie prüfen: $f(-x) = -\frac{1}{20}(-x)^4 + \frac{4}{15}(-x)^3 = -\frac{1}{20}x^4 - \frac{4}{15}x^3 \neq -f(x)$

6) $-\frac{1}{20}x^4$ ist der für das Globalverhalten relevante Teilterm, daher $x \to -\infty : f(x) \to -\infty$

$x \to \infty : f(x) \to -\infty$

7) $f(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{4}{15}x^3 = x^3(-\frac{1}{20}x + \frac{4}{15}) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = 0$ (Dreifachnullstelle), $N_2 = \frac{16}{3}$

Darstellung als Linearfaktorprodukt: $f(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{4}{15}x^3 = -\frac{1}{20}(x-0)^3 \cdot (x - \frac{16}{3})$

8) Kandidaten für Extremstellen (notwendiges Kriterium): $e_1 = 0,\ e_2 = 4$ (siehe Aufgabe 3)

$f''(0) = 0 \quad \Rightarrow$ keine Aussage möglich, VZW prüfen: $f'(-1) = 1 \quad f'(1) = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow$ kein Vorzeichenwechsel, daher hat die Funktion bei x=0 einen Sattelpunkt

$f''(4) = -\frac{16}{5} \quad \Rightarrow$ negativ (rechtsgekrümmt), daher hat f(x) bei x=4 ein lokales Maximum

9) Kandidaten für Wendestellen (notwendiges Kriterium): $w_1 = 0,\ w_2 = \frac{8}{3}$ (siehe Aufgabe 4)

$f'''(0) = \frac{8}{5}$ $\Rightarrow$ *f(x)* hat bei x = 0 eine rechts/links-Wendestelle (Horizontalwendestelle, s.o.)

$f'''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{8}{3}$ $\Rightarrow$ *f(x)* hat bei $x = \frac{8}{3}$ eine links/rechts-Wendestelle

10) Steigung *m* an der Stelle $x = \frac{8}{3}$: $m = f'\left(\frac{8}{3}\right) = 1{,}896$

y-Achsenabschnitt (Ordinatenabschnitt) b: $f\left(\frac{8}{3}\right) = 2{,}528 \Rightarrow w_2\left(\frac{8}{3} \middle| 2{,}528\right)$

Geradengleichung nach b auflösen und die Punktkoordinaten einsetzen:

$b = y - m \cdot x = 2{,}528 - 1{,}896 \cdot \frac{8}{3} = -2{,}528$

$\Rightarrow$ $Tangentengleichung\ \ t(x) = 1{,}896x - 2{,}528$

Steigung der Normalen: $m_n = \frac{-1}{1{,}896} = -0{,}527$

y-Achsenabschnitt der Normalen: $b_n = y - m_n \cdot x = 2{,}528 - (-0{,}527) \cdot \frac{8}{3} = 3{,}933$

$\Rightarrow$ $Normalengleichung\ \ n(x) = -0{,}527x + 3{,}933$

Fläche des eingeschlossenen Dreiecks: $t(0) = y = -2{,}528$ $\quad t(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

$A_{Dreieck} = \left|\frac{1}{2} \cdot -2{,}528 \cdot \frac{4}{3}\right| \approx 1{,}68\ FE$

11) Steigung des Graphen an der rechten Nullstelle (s.o.): $f'\left(\frac{16}{3}\right) = -7{,}585$

Winkel berechnen: $|tan^{-1}(-7{,}585)| = 82{,}49°$

12) Wendepunkte (s.o.): $w_1(0\,|0)$ $\quad w_2\left(\frac{8}{3} \middle| 2{,}528\right)$

Mittlere Steigung bzw. Änderungsrate im Intervall $[0; \frac{8}{3}]$: $m = \frac{2{,}528-0}{\frac{8}{3}-0} = 0{,}948$