Arbeitsblatt Kettenregel / Lineare Substitution Lösungsblatt

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = 3x + 2$

1) Erstelle eine dritte Funktion *h(x)* als Verkettung von *f* und *g* (äußere / innere Funktion).
2) Bilde die erste und zweite Ableitung von *h(x).*
3) Ermittle eine Stammfunktion *H(x)* für *h(x).*
4) Überprüfe durch Differenzieren die Richtigkeit deiner Lösung für *H(x).*

Hinweis: Fasse die jeweiligen Ergebnisterme soweit wie möglich zusammen.
Alle Exponenten sollten am Ende dabei Natürliche Zahlen sein.

Lösungen:

1) *g(x)* als Argument in *f(x)* einsetzen:

$$h(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{3x+2}$$

2) h(x) als Potenz schreiben:

$$h(x) = \sqrt{3x+2} = (3x+2)^{\frac{1}{2}}$$

Ableiten mittels Faktor-, Ketten- und Potenzregel:

$$h'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3x+2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{(3x+2)}}$$

Ableiten mittels Faktor-, Ketten- und Potenzregel:

$$h''(x) = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot -\frac{1}{2} \cdot (3x+2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-9}{4 \cdot \sqrt{(3x+2)^3}}$$

3) Stammfunktion mittels Linearer Substitution aufstellen („Aufleiten“):

$$\int h(x)dx = H(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)} (3x+2)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} \sqrt{(3x+2)^3} + C$$

4) Durch Ableiten (Faktor-, Ketten- und Potenzregel) prüfen, ob *H(x)* eine Stammfunktion von *h(x)* ist:

$$H'(x) = \frac{2}{9} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot (3x+2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(3x+2)} = h(x)$$