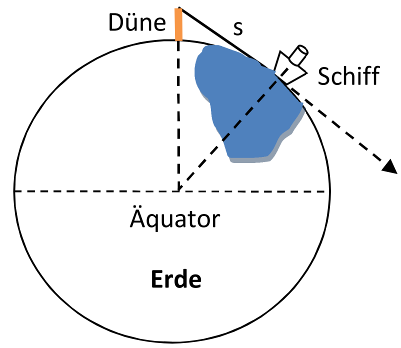
Geometrie / Pythagoras - Anwendungsaufgaben

Lösungsblatt:

1) Sommerliche Fernsicht



Der Radius der Erdkugel beträgt: $r \approx \frac{40000}{2\Pi} \approx 6366{,}2km$

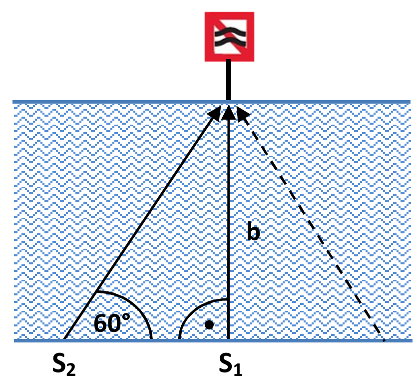
$$s^2 + r^2 = (r + Düne)^2$$

$$s = \sqrt{(r + Düne)^2 - r^2} \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{(6366{,}2 + 0{,}01)^2 - 6366{,}2^2} \approx 11{,}28km$$

Geht man von der Dünenhöhe 10m aus, kann man 11,28km weit schauen.
Würde man noch eine Augenhöhe von ca. 1,50m hinzunehmen, also aus 11,5m Höhe auf den Horizont schauen, könnte man sogar 12,1km weit schauen.
Annas Vater hat also recht.

Das Dreieck hat einen rechten Winkel „unter" dem Schiff, da die Tangente an einen Kreis im Berührpunkt senkrecht auf dem Radius steht. Dies kann man im Arbeitsblatt „Tangente am Kreis" mit Hilfe des Satz des Thales zeigen.

2) Wie breit ist der Kanal?

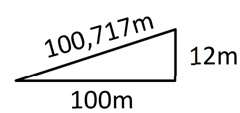


Johannes ergänzt das Dreieck durch Spiegelung an b zu einem gleichseitigen Dreieck (alle Winkel betragen 60°). Jetzt kann man erkennen, dass die Strecke $\overline{S_2\text{Schild}}$ genau doppelt so lang wie die Strecke $\overline{S_1S_2}$ mit 30 . 0,8m = 24m ist.

Damit ergibt sich: $b = \sqrt{(48)^2 - 24^2} \approx 41{,}57m$

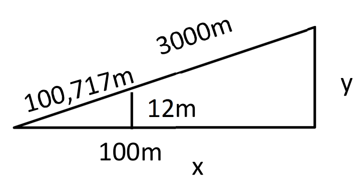
3) Ausdauer erforderlich!

a) 12% Steigung bedeuten 12 m Höhenunterschied auf 100m horizontale Strecke. Die zugehörige Fahrstrecke ist dann:



$$\sqrt{(100)^2 + 12^2} \approx 100{,}717m$$

Mit Hilfe des ersten Strahlensatzes ergibt sich für die horizontale Entfernung x:

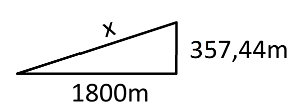


$$\frac{100}{x} = \frac{100{,}717}{3000} \quad \Rightarrow \quad x = 100 \cdot \frac{3000}{100{,}717} \approx 2978{,}64m$$

Lena legt ca.2978,64m in horizontaler Richtung zurück.

b) $\frac{2978{,}64}{100} \cdot 12 \approx 357{,}44m$ Lena überwindet einen Höhenunterschied von ca. 357,44m

c) $\sqrt{(1800)^2 + 357{,}44^2} \approx 1835{,}15m$



Die Strecke wäre ca. 1835,15m lang und hätte eine Steigung von:

$$\frac{357{,}44}{1800} \approx 0{,}1986 = 19{,}86\%$$

Natürlich kann man auch alle Aufgaben mit Mitteln der Trigonometrie lösen:

1) Sommerliche Fernsicht

Der Winkel am Erdmittelpunkt beträgt:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{r}{(r + Düne)}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{6366{,}2}{6366{,}21}\right) \approx 0{,}10155°$$

Damit ergibt sich s durch: $\sin(\alpha) = \frac{s}{r + Düne}$

$$s = \sin(\alpha) \cdot (r + Düne) = \sin(0{,}10155) \cdot 6366{,}21 = 11{,}28km$$

2) Wie breit ist der Kanal?

$$\tan(60°) = \frac{b}{24m}$$

$$b = 24m \cdot \tan(60°) = 41.57m$$

3) Ausdauer erforderlich!

a) 12% Steigung in einen Steigungswinkel umrechnen: $\tan^{-1}\left(\frac{12}{100}\right) \approx 6{,}843°$

Die horizontale Entfernung beträgt: $\cos(6{,}843) = \frac{x}{3000m} \quad \Rightarrow \quad x = \cos(6{,}843) \cdot 3000m = 2978{,}63m$

b) Lena überwindet einen Höhenunterschied von: $\sin(6{,}843) = \frac{y}{3000m} \quad \Rightarrow \quad y = \sin(6{,}843) \cdot 3000m = 357{,}44m$

c) Da zuerst ein Winkel mit Hilfe der Katheten ermittelt werden müsste, bevor die Länge der Hypotenuse berechnet werden kann, ist der Rechenweg mittels Pythagoras einfacher.