Die optimale Getränkedose
- Lösungen -

1) Bestimmung der optimalen Dosenabmessung

<u>Vorgaben</u> Volumen: 0,33l bzw. 330ml

Form: Zylinder

1.Hauptbedingung

Gesucht ist eine Dose mit minimaler Oberfläche: $O(h,r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

2. Nebenbedingung

In der Nebenbedingung kann die Information über das Volumen genutzt werden, um eine der beiden Variablen in der Hauptbedingung zu eliminieren: $V(h,r) = \pi r^2 h = 330cm^3$

Ansatz 1

Die Nebenbedingung nach h auflösen:

$$h = \frac{330}{\pi r^2}$$

3. Zielfunktion

$$O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{330}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$$

4. Extremwerte

$$O'(r) = 4\pi r - \frac{660}{r^2}$$

$$O'(r) = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}} \approx 3{,}745$$

$$O''(r) = 4\pi + \frac{1320}{r^3}$$

$$O''(3{,}745) \approx 37{,}7 > 0 \Rightarrow Minimum$$

5. Berechnung fehlender Größen

$$h \approx 7{,}49 \approx 2r \qquad O \approx 264{,}36cm^2$$

Ansatz 2

Die Nebenbedingung nach r auflösen:

$$r = \sqrt{\frac{330}{\pi h}}$$

3. Zielfunktion

$$O(h) = 2\pi \frac{330}{\pi h} + 2\pi h \sqrt{\frac{330}{\pi h}} = \frac{660}{h} + \sqrt{1320\pi h}$$

4. Extremwerte

$$O'(h) = \sqrt{\frac{330\pi}{h}} - \frac{660}{h^2}$$

$$O'(h) = 0 \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{1320}{\pi}} \approx 7{,}49$$

$$O''(h) = -\frac{\sqrt{330\pi}}{2\sqrt{h^3}} + \frac{1320}{h^3}$$

$$O''(7{,}49) \approx 3{,}93 > 0 \Rightarrow Minimum$$

5. Berechnung fehlender Größen

$$r \approx 3{,}745 \approx \frac{1}{2}h \qquad O \approx 264{,}36cm^2$$

Detailschritte der Termumformung

Manchmal fällt das Umformen von Wurzeltermen zur Vereinfachung der Gleichung schwer. Daher hier als Kontrollhilfe für die eigene Rechnung oder als Übungsmaterial ausgewählte Umformungsschritte aus obigem Ansatz 2 noch einmal im Detail.

1) Vereinfachen des zweiten Summanden der Zielfunktion

$f(h) = 2\pi h\sqrt{\frac{330}{\pi h}}$ | Den Faktor vor der Wurzel quadrieren, unter die Wurzel ziehen und kürzen

$= \sqrt{1320\pi h}$ | Den konstanten Faktor und die Variable getrennt schreiben

$= \sqrt{1320\pi} \bullet h^{\frac{1}{2}}$

2) Die Ableitung des zweiten Summanden der Zielfunktion vereinfachen

$f'(h) = \sqrt{1320\pi} \bullet \frac{1}{2} h^{-\frac{1}{2}}$ | Partielles Wurzelziehen: 1320 = 4 * 330

$= 2\sqrt{330\pi} \bullet \frac{1}{2} h^{-\frac{1}{2}}$ | Kürzen und Wurzelschreibweise verwenden

$= \sqrt{330\pi} \bullet \frac{1}{\sqrt{h}} = \sqrt{\frac{330\pi}{h}}$ | Wurzeln auf einen Bruchstrich bringen und zusammenfassen

3) Die Ableitung O'(h) Null setzen und nach h auflösen

$$\sqrt{\frac{330\pi}{h}} - \frac{660}{h^2} = 0$$

$$\sqrt{\frac{330\pi}{h}} = \frac{660}{h^2}$$

$\sqrt{330\pi} \bullet \frac{1}{\sqrt{h}} \bullet h^2 = 660$ | Variable auf die linke Seite, Konstanten auf die rechte Seite bringen

$\frac{1}{\sqrt{h}} \bullet h^2 = \frac{660}{\sqrt{330\pi}}$ | Beide Seiten der Gleichung quadrieren, um die Wurzel aus dem Nenner zu entfernen

$\frac{1}{h} \bullet h^4 = \frac{(660)^2}{330\pi}$ | Zusammenfassen und kürzen

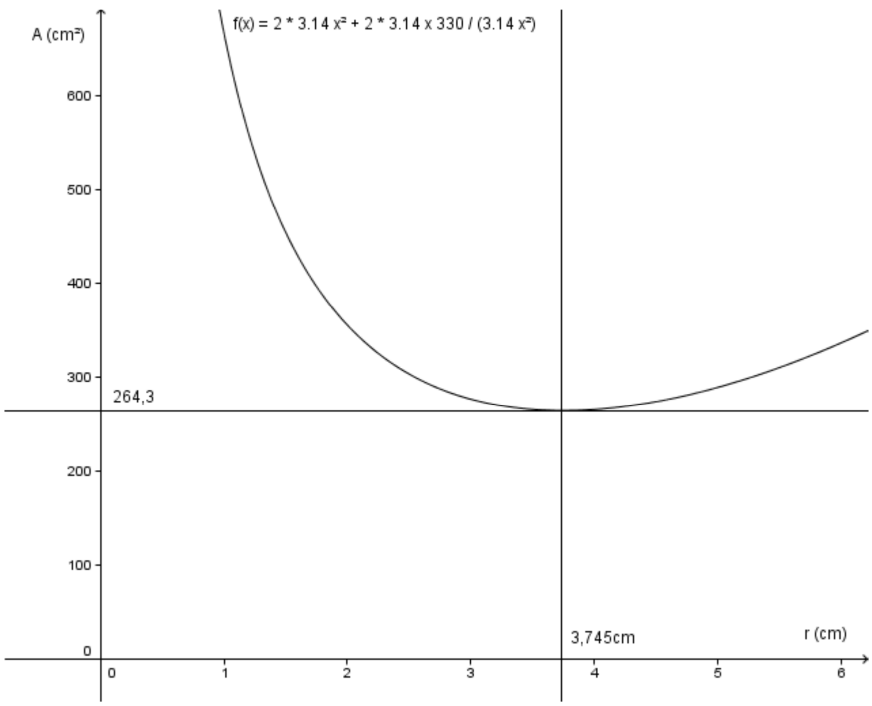
$$h^3 = \frac{1320}{\pi}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{1320}{\pi}} \approx 7{,}49$$

2) Materialkosten bei Abweichungen vom Idealmaß

Die Auswirkungen von Abweichungen vom Idealmaß zeigen sich am anschaulichsten, wenn man den Graphen der Zielfunktion *O(r)*, z.B. mit Hilfe von GeoGebra, darstellt und untersucht.

Dabei wird deutlich, dass der Graph in der Nähe des optimalen Wertes von $r = 3{,}745$cm sehr flach verläuft und sich der Materialverbrauch bei Abweichungen des Radius von $\pm\,0{,}5$cm von diesem Wert nur geringfügig erhöht. Die Designer aus dem Marketing haben also Spielraum bei der Gestaltung der Abmessungen.



3) Vergleich der Übereinstimmung von Realität und Rechnung

Misst man reale Dosenformen aus, erhält man in der Regel vom Optimum abweichende Abmessungen. Hier zwei Beispiele:

Dose 1, gemessene Maße: $r \approx 3{,}2$ cm und $h \approx 10{,}5$ cm $\Rightarrow$ $O \approx 270{,}6\text{cm}^2$

Abweichung von der idealen Dose: 2,4%

Dose 2, gemessene Maße: $r \approx 2{,}9$ cm und $h \approx 13{,}8$ cm $\Rightarrow$ $O \approx 304{,}3\text{cm}^2$

Abweichung von der idealen Dose: 15,1%

Viele aktuelle Dosen sind, wie Dose 2, schmaler und höher als die ideale Dose.

Eine mögliche Interpretation könnte sein, dass die Dosenform als Reaktion auf beliebte Energy-Drinks, die häufig in relativ schmalen Dosen verkauft werden, auch optisch den Eindruck eines „Lifestyle"-Produktes vermitteln soll und daher nicht minimale Verpackungskosten in Kauf genommen werden.