Anleitung für das Lösen von Extremalaufgaben

1. Hauptbedingung aufstellen

Die Hauptbedingung besteht aus der <u>*Beschreibung der zu maximierenden oder minimierenden Größe*</u> mit Hilfe einer Gleichung mit einer oder mehrerer Variablen.
Das Verständnis der Aufgabenstellung ist Voraussetzung (Frage: „*<u>Was</u> soll optimiert werden ?*“), hierbei ist häufig eine Planskizze mit allen *relevanten* Daten hilfreich.

Die Hauptbedingung enthält mehr als eine Variable

Nur eine Variable: Zielfunktion entspricht der Hauptbedingung

2. Nebenbedingung(en) untersuchen / ermitteln

Die Hauptbedingung beinhaltet in der Regel mehr als eine Variable und kann damit nicht direkt berechnet werden.

Mit der/den Nebenbedingung(en) werden <u>*Beziehungen zwischen den Variablen / Größen*</u> beschrieben. Ziel ist es, im nächsten Schritt nach einer Variablen auflösen und diese dann in die Hauptbedingung einsetzen zu können.
Nebenbedingungen können auch <u>*Einschränkungen des Definitionsbereiches*</u>, z.B. auf ein Intervall, beinhalten.

3. Zielfunktion aufstellen

Die Nebenbedingung(en) <u>*nach einer Variablen auflösen und diese in die Hauptbedingung einsetzen*</u>, um hierin nur noch eine einzige Variable zu haben.
Damit wird aus der Hauptbedingung die Zielfunktion, mit der das Maximum oder Minimum bestimmt werden kann.

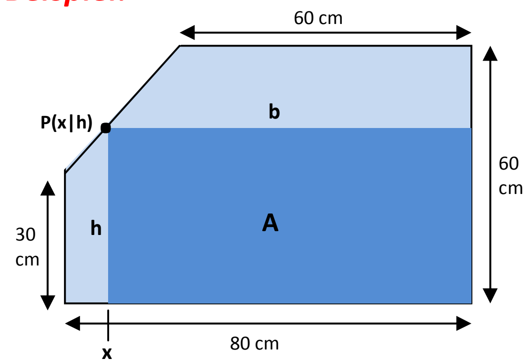
4. Bestimmung des Optimums der Zielfunktion

Je nach Aufgabenstellung <u>*Bestimmung des absoluten Maximums*</u> (z.B. bei einem Gewinn oder einer Fläche, siehe rechts) <u>*oder des Minimums*</u> (z.B. bei Kosten) durch Untersuchung der Zielfunktion.

Dies kann durch Mittel der Kurvendiskussion (Ableitungen etc.) oder, bei einfachen quadratischen Funktionen, mit Hilfe der pq-Formel/der Scheitelpunktform erfolgen.

Bei Einschränkungen im Definitionsbereich sind ggf. auch noch die Randbereiche zu untersuchen (siehe Beispiel).

Beispiel:



Aufgabe:

Von einer rechteckigen Glasplatte ist eine Ecke abgebrochen. Aus dem Rest soll eine rechteckige Scheibe mit möglichst großer Fläche geschnitten werden.
Wie ist der Punkt P(x|h) hierbei zu wählen ?

1. Hauptbedingung:

Zu optimieren ist die <u>Fläche</u> der Scheibe,
daher: $A(b,h) = b \cdot h$

2. Nebenbedingungen:

1) $b = 80 - x$

2) P liegt auf einem Teilbereich der Geraden durch die Punkte (0|30) und (20|60).
Diese kann beschrieben werden durch:

$m = (60 - 30) : (20 - 0) = 1{,}5 \quad n = 30$

$\Rightarrow \quad h = 1{,}5x + 30$

3) x ist nur sinnvoll im Bereich der Schrägen, daher ist der Definitionsbereich eingeschränkt auf $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 20\}$

3. Zielfunktion:

Die Terme für b und h aus den Nebenbedingungen in die Hauptbedingung einsetzen, um die Zielfunktion zu erstellen:

$$A(x) = (80 - x)(1{,}5x + 30)$$
$$= -1{,}5x^2 + 90x + 2400$$

Die Zielfunktion beinhaltet jetzt nur noch eine Variable, von der die Größe A abhängt.

4. Optimum (hier: Maximum):

Ableitungen bilden: $A'(x) = -3x + 90$
$A''(x) = -3$

Extremstelle(n) ermitteln:
$A'(x) = -3x + 90 = 0 \Rightarrow x_1 = 30$ (Maximum)

Der Wert des Extremums $x_1 = 30$cm liegt außerhalb des zulässigen Bereiches (s.o.) und kann damit keine Lösung sein. Daher müssen die Ränder des Definitionsbereiches betrachtet werden, um das globale Maximum in diesem Bereich zu ermitteln:

$A(0) = 80 \cdot 30 = 2400 \quad A(20) = 60 \cdot 60 = 3600$

Damit ist *P(20|60)* die gesuchte Lösung.

K. Milzner, 2012 www.milzners.de