# Analytische Geometrie - Grundlagenübungen

## Lösungsteil:

Gegeben sind die drei Punkte **A(3 | 8 | –10)**,
**B(3 | 20 | –25)** und
**C(6 | 4 | –10)**.

**1)** Die Punkte können auf einer Geraden liegen oder ein Dreieck im Raum bilden.
Ansatz: Gerade mit Punktprobe

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3-3 \\ 20-8 \\ -25-(-10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \lightning$$ nicht auf einer Geraden

---

**2)** $$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3-3 \\ 20-8 \\ -25-(-10) \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6-3 \\ 4-8 \\ -10-(-10) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor mittels Kreuzprodukt (Vektorprodukt / LK) der Spannvektoren ermitteln:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -15 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (12 \cdot 0) - (-15 \cdot -4) \\ (-15 \cdot 3) - (0 \cdot 0) \\ (0 \cdot -4) - (12 \cdot 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ -45 \\ -36 \end{pmatrix}, \ gekürzt\ mit\ (-3): \ \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Alternativ (GK) per unterbestimmtem LGS einen orthogonalen Vektor ermitteln:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ \begin{matrix} 12y - 15z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{matrix} \qquad GTR: \left\{ \frac{5 \cdot c1}{3}, \ \frac{5 \cdot c1}{4}, \ c1 \right\}$$

Mit der Wahl *c1 = –36* ergibt sich der gleiche Normalenvektor $\vec{n}_1$ wie oben, für *c1 = 12* folgt $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Im folgenden wird in der Regel $\vec{n}_2$ verwendet, da hiermit Berechnungen leichter fallen.

$$\Rightarrow E: \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$$

---

**3)** Ansatz: über die vereinfachte Normalengleichung die Koordinatengleichung der Ebene herleiten, hieraus können die Schnittpunkte abgelesen werden

$$E: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix} = 60 \ \Rightarrow \ \begin{matrix} E: \ 20x + 15y + 12z = 60 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x_s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y_s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z_s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Alternativ können die Achsenschnittpunkte mit Hilfe der Parametergleichung und einem LGS pro Koordinate durch Nullsetzen der anderen Koordinaten und Einsetzen der Parameterwerte *r* und *s* berechnet werden.

**4)** Ansatz: Die Kosinusformel auf die Spannvektoren der Ebene anwenden (A ist Stützvektor)

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}0\\12\\-15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\12\\-15\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{-48}{\sqrt{369}\cdot\sqrt{25}} \approx -0{,}4997 \qquad \alpha \approx cos^{-1}(-0{,}4997) \approx 119{,}98°$$

Um die Fläche des Dreiecks ABC zu ermitteln, gibt es mehrere Möglichkeiten:

a) mit Hilfe des Kreuzproduktes (LK): $A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot|\vec{u}\times\vec{v}| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-60\\-45\\-36\end{pmatrix}\right|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-60)^2+(-45)^2+(-36)^2} \approx 41{,}6\,FE$$

b) mit Hilfe des Sinussatzes: $A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin(119{,}98) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{369}\cdot\sqrt{25}\cdot\sin(119{,}98) \approx 41{,}6\,FE$

c) mit Hilfe der im Buch, Kapitel *Skalarprodukt*, angegebenen Flächenformel $A_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{u}^2\cdot\vec{v}^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}$

---

**5)** Ansatz: Parametergleichung der Ebene und Punkt gleich setzen, Parameter ermitteln und prüfen

$$\begin{pmatrix}3\\8\\-10\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\12\\-15\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\\-15\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}3s &= 3\\ 12r-4s &= 0\\ -15r \quad &= -5\end{aligned} \quad GTR\colon\ r=\frac{1}{3},\ \ s=1$$

Die Bedingungen $(1)\ 0\le r\le 1$ und $(2)\ 0\le s\le 1$ sind erfüllt, die Bedingung $(3)\ 0\le r+s\le 1$ nicht.

⇒ ↯ Der Punkt D liegt innerhalb der Ebene, da das LGS lösbar ist, aber nicht innerhalb der durch die Punkte A, B und C aufgespannten Dreiecksfläche, da Bedingung (3) nicht erfüllt ist.

---

**6)** Ansatz: Die Gerade $g_1$ in die Normalengleichung einsetzen und nach dem Geradenparameter auflösen (Alternativ die Geradengleichung und die Parametergleichung gleich setzen und das LGS lösen)

$$\left[\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-14\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\8\\-10\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}20\\15\\12\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}0t+3\\-14t-2\\-t+16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}20\\15\\12\end{pmatrix}=0 \Rightarrow 222t=222 \Rightarrow t=1$$

*t=1* in die Geradengleichung eingesetzt ergibt als Schnittpunkt $S(6\,|-8\,|\,5)$.

Den Schnittwinkel der Geraden mit der Ebene indirekt über den Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden ermitteln:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}20\\15\\12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-14\\-1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}20\\15\\12\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\-14\\-1\end{pmatrix}\right|} = \frac{222}{\sqrt{769}\cdot\sqrt{197}} \approx 0{,}57 \qquad \alpha \approx cos^{-1}(0{,}57) \approx 55{,}25° \quad \beta = 90°-55{,}25 \approx 34{,}75°$$

Da $\cos(90-\beta)=\sin(\beta)$ gilt, hätte man hier einfacher auch $sin^{-1}(0{,}57)\approx 34{,}75°$ rechnen können.

---

**7)** Der kürzeste Abstand zwischen Punkt und Ebene kann mit Hilfe einer Lotgeraden durch Punkt und Ebene ermittelt werden. Er entspricht dem Betrag des Vektors zwischen Punkt und Schnittpunkt der Lotgeraden mit der Ebene.

Lotgerade: $g_2 = \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}20\\15\\12\end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit der Ebene: $\left[\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}20\\15\\12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\8\\-10\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}20\\15\\12\end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}20t+3\\15t-2\\12t+16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}20\\15\\12\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow 769t = -222 \quad \Rightarrow t \approx -0{,}289 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} - 0{,}289\cdot\begin{pmatrix}20\\15\\12\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0{,}22\\1{,}665\\2{,}532\end{pmatrix}$

Abstand: $\left|\begin{pmatrix}6-0{,}22\\6-1{,}665\\6-2{,}532\end{pmatrix}\right| = \sqrt{5{,}778^2 + 4{,}335^2 + 3{,}468^2} \approx 8{,}01\ LE$

Alternativer Rechenweg mit Hilfe eines auf Eins normierten Normalenvektors (LK / Hesse'sche Normalform):

$|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix}20\\15\\12\end{pmatrix}\right| = \sqrt{20^2+15^2+12^2} = \sqrt{769} \quad \Rightarrow \quad E\colon \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\8\\-10\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}20/\sqrt{769}\\15/\sqrt{769}\\12/\sqrt{769}\end{pmatrix} = 0$

$d = \left|\left(\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\8\\-10\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}20/\sqrt{769}\\15/\sqrt{769}\\12/\sqrt{769}\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\-2\\16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{20}{\sqrt{769}}\\\frac{15}{\sqrt{769}}\\\frac{12}{\sqrt{769}}\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{60-30+192}{\sqrt{769}}\right| \approx 8{,}01\ LE$

**8)** Mit Hilfe des Koeffizienten $t$ für die Lotgerade / den Lotfußpunkt aus Teilaufgabe 7) ergibt sich:

$E' = \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} - 2\cdot 0{,}289\cdot\begin{pmatrix}20\\15\\12\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}-5{,}56\\-2{,}67\\-0{,}936\end{pmatrix}$

**9)** Erste Möglichkeit (LK):

Orthogonal zur Geraden liegende Hilfsebene erstellen, die den Punkt B enthält:

$H\colon \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\20\\-25\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0\\-14\\-1\end{pmatrix} = 0$

Schnittpunkt ermitteln: $\left[\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-14\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\20\\-25\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0\\-14\\-1\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 197\mathrm{t} + 165 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{t} = -\frac{165}{197}$

$\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} - \frac{165}{197}\begin{pmatrix}0\\-14\\-1\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}6\\17{,}726\\6{,}838\end{pmatrix}$

Abstand: $\left|\begin{pmatrix}3-6\\20-17{,}726\\-25-6{,}838\end{pmatrix}\right| \approx 32{,}06\ LE$

Zweite Möglichkeit (GK):

Allgemeinen Geradenpunkt X angeben (für den Lotfußpunkt): $X(6 \mid 6 - 14t \mid 6 - t)$

Vektor $\overrightarrow{BX}$ ermitteln: $\overrightarrow{BX} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 - 14t \\ 6 - t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -14 - 14t \\ 31 - t \end{pmatrix}$

Lotfußpunkt (Gerade und $\overrightarrow{BX}$ orthogonal): $\begin{pmatrix} 3 \\ -14 - 14t \\ 31 - t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow 196 + 196\mathrm{t} - 31 + \mathrm{t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{t} = -\frac{165}{197} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{LFP:}\ \mathrm{F} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{-165}{197} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6 \\ 17{,}726 \\ 6{,}838 \end{pmatrix}$$

Abstand: $\left|\overrightarrow{BF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 - 6 \\ 20 - 17{,}726 \\ -25 - 6{,}838 \end{pmatrix}\right| \approx 32{,}06\ LE$